



RENIECYT - LATINDEX - Research Gate - DULCINEA - CLASE - Sudoc - HISPANA - SHERPA UNIVERSIA - E-Revistas - Google Scholar  
DOI - REDIB - Mendeley - DIALNET - ROAD - ORCID

## Title: Modelado y simulación del péndulo de base móvil

**Authors:** LÓPEZ-ORTEGA, Filemón, CÁRDENAS-MACIEL, Martha, SERRANO-ZEPEDA, Rogelio y  
LARA-CEBALLOS, Miguel Ángel.

Editorial label ECORFAN: 607-8695

BCIERMMI Control Number: 2019-244

BCIERMMI Classification (2019): 241019-244

Pages: 16

RNA: 03-2010-032610115700-14

**ECORFAN-México, S.C.**

143 – 50 Itzopan Street  
La Florida, Ecatepec Municipality  
Mexico State, 55120 Zipcode  
Phone: +52 1 55 6159 2296  
Skype: ecorfan-mexico.s.c.  
E-mail: contacto@ecorfan.org  
Facebook: ECORFAN-México S. C.

Twitter: @EcorfanC

[www.ecorfan.org](http://www.ecorfan.org)

**Holdings**

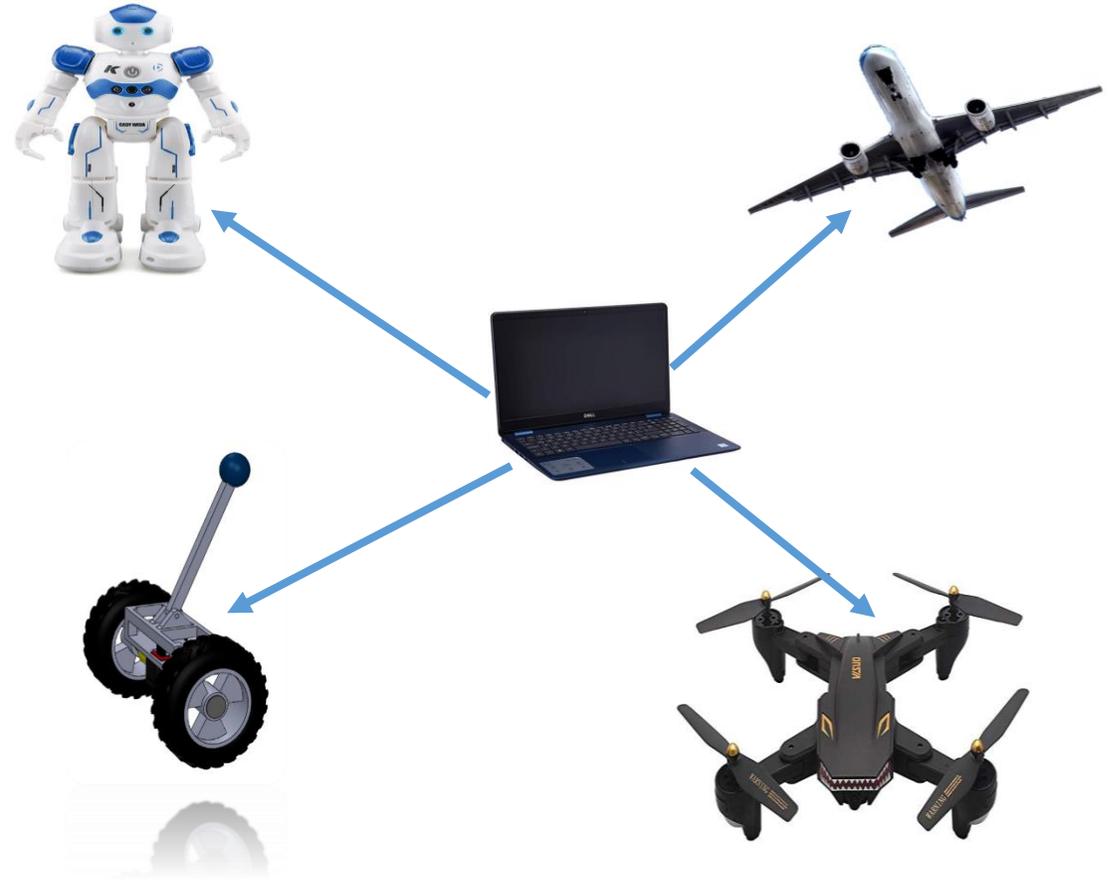
Mexico	Colombia	Guatemala
Bolivia	Cameroon	Democratic
Spain	El Salvador	Republic
Ecuador	Taiwan	of Congo
Peru	Paraguay	Nicaragua

# Contenido

1. Introducción
2. Metodología
3. Modelado matemático del sistema
4. Análisis de la respuesta mediante Matlab
5. Diseño e implementación del controlador PID
6. Control Robusto por Modelo Interno
7. Resultados
8. Conclusiones

# Introducción

Controlar un sistema significa manipular su respuesta dinámica para cumplir las demandas de una tarea que se va a ejecutar. Por tanto, resulta difícil comprender la respuesta de un modelo dinámico antes de diseñar e implementar un algoritmo de regulación que modifique su comportamiento dinámico.



# Metodología

Para desarrollar el modelo matemático del péndulo de base móvil, se aplicó la metodología de Newton-Euler (NE), el cual se deriva directamente de la segunda ley de Newton y de los principios de movimiento rotacional planteado por Euler. Una vez definidas las ecuaciones se aplicó el método de sintonización por ubicación de polos y ceros para desarrollar el controlador PID.

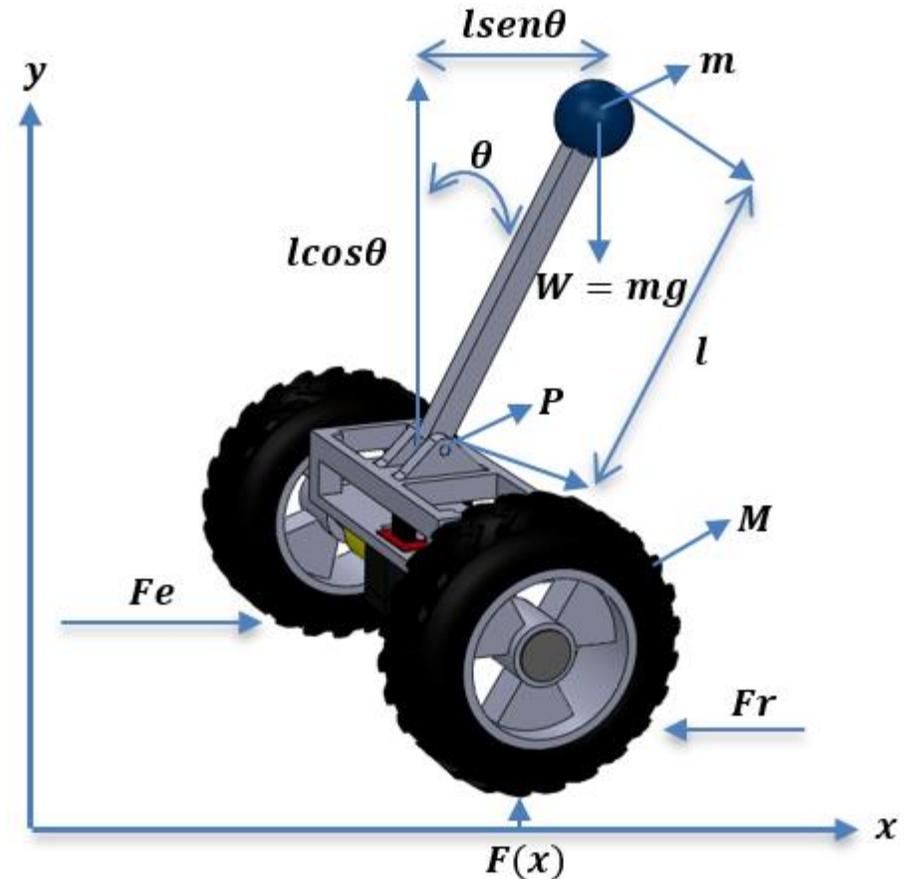


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre PBM

# Metodología

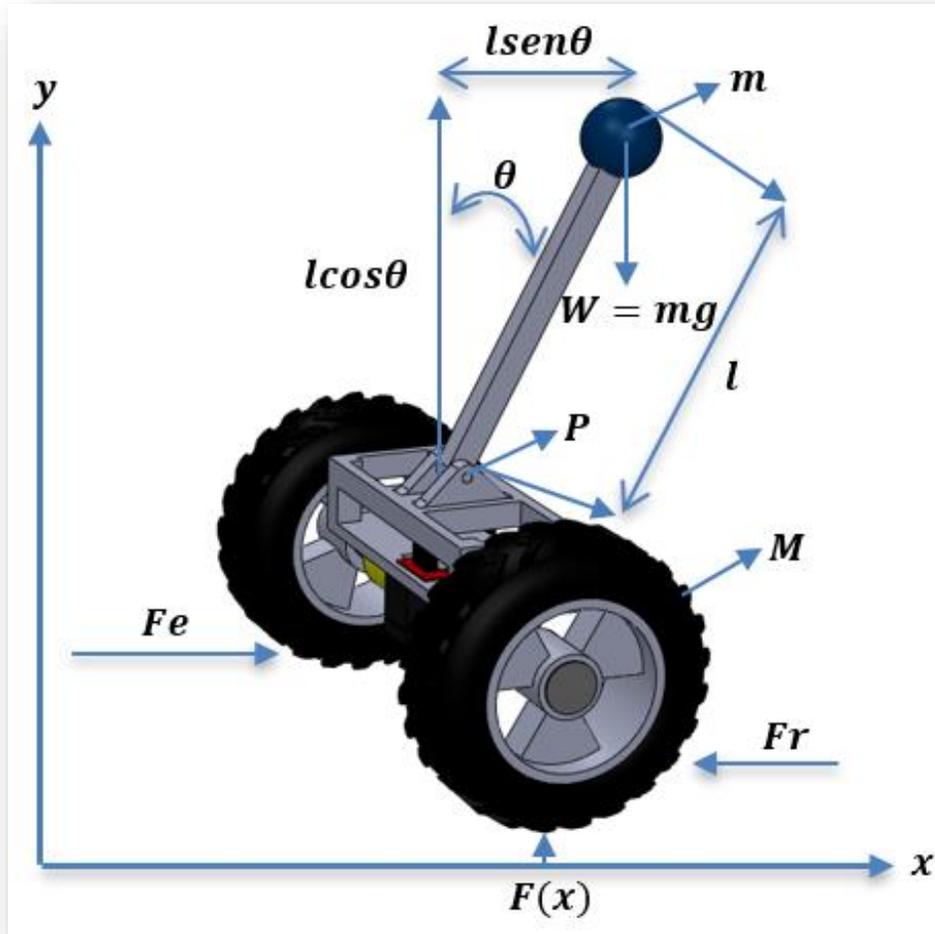


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre PBM

Símbolos	Descripción
$F_e$	Fuerza de empuje.
$F_r$	Fuerza de fricción.
$l$	Longitud de la barra.
$I$	Inercia del péndulo.
$w$	Peso de la esfera.
$f(x)$	Posición del móvil.
$\theta$	Ángulo del péndulo desde la vertical.
$g$	Constante gravitacional.
$P$	Conexión entre los dos sistemas (Origen).
$M$	Masa de la base móvil.
$m$	Masa de la esfera.

Tabla 1: Descripción de las variables físicas

# Modelado matemático del sistema

Todo elemento que gira sobre su propio eje posee momento de inercia ( $I$ ) de acuerdo al Postulado de Euler, ecuación 1.

Ecuacion de movimiento rotacional 2, a partir de la ecuación 1.

$$-(Fy \text{ lsen } \theta + Fx \text{ l cos } \theta) - Frp = I\alpha \quad (2)$$

La expresión 3, representa la ecuación diferencial del movimiento rotacional del péndulo

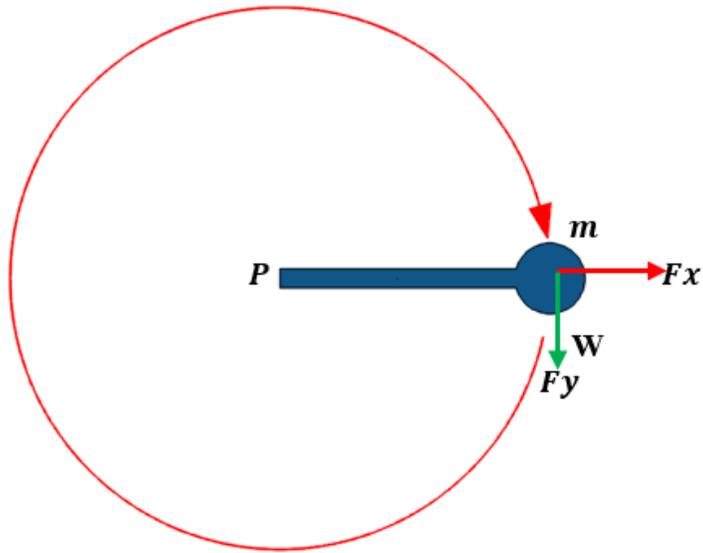


Figura 2: Movimiento del péndulo en  $Fx$  y  $Fy$

$$\sum \tau = I \alpha \quad (1)$$

$$mg\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

# Modelado matemático del sistema

Para determinar la rapidez de reacción de la base móvil al movimiento rotacional del péndulo, es necesario calcular la fuerza de empuje ( $F_e$ ) que se aplicará, por lo que, se define en la ecuación 4.

$$(M + m) \frac{d^2x}{dt^2} + ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = Fe(t) \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se aplica el método de eliminación para encontrar las variables  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$  y  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$  a continuación, se formulan las siguientes ecuaciones lineales (5).

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= mg\theta \\ (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= Fe(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones se presentan en las expresiones (6) y (7).

$$\ddot{x} = -\frac{m}{M}g\theta + \frac{1}{M}Fe(t) \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)}{Ml}g\theta - \frac{1}{Ml}Fe(t) \quad (7)$$

Por lo tanto, el modelo de movimiento rotacional del péndulo en el dominio de la Laplace se representa en la ecuación (8).

$$\frac{\theta(s)}{Fe(s)} = \frac{-\frac{1}{Ml}}{s^2 + \beta s - g \frac{(M + m)}{Ml}} \quad (8)$$

# Modelado matemático del sistema

El modelo de desplazamiento del móvil, en el dominio de la Laplace se representa en la ecuación (9).

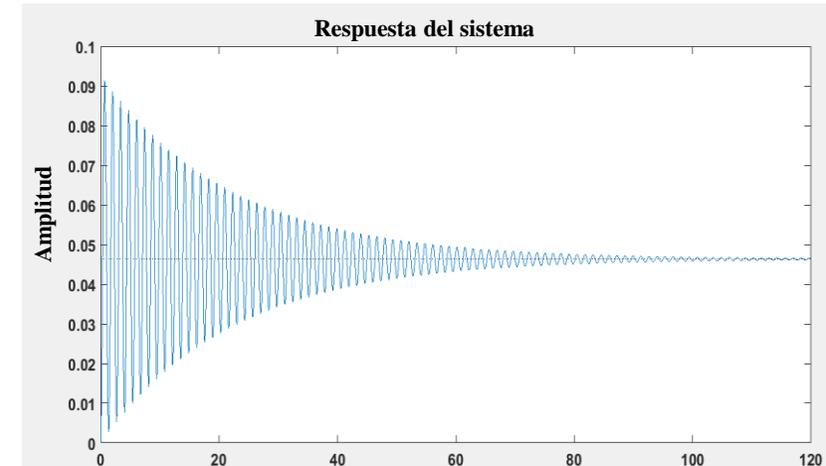
$$\frac{X(s)}{F e(s)} = \frac{1}{s^2 + \beta s + g \frac{m}{M}} \quad (9)$$

En la tabla 2 se presentan las variables a consideradas para simular el comportamiento dinámico del péndulo de base móvil mediante las ecuaciones (8) y (9)

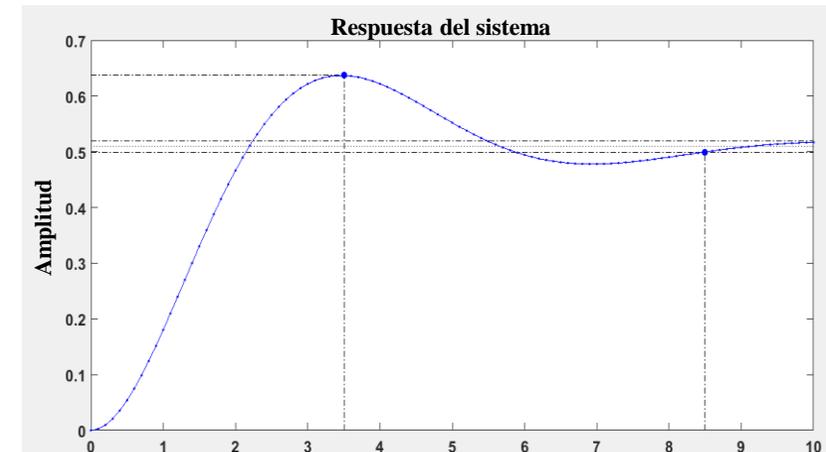
Símbolos	Descripción
M	Masa de la base móvil = 2 kg
m	Masa de la esfera = 0.2 kg
g	Constante gravitacional = 9.81m/s <sup>2</sup>
l	Longitud del péndulo = 0.5 m
$\beta_p$	Coefficiente de rodamiento para el péndulo de acero//acero = 0.09 $\mu$ d
$\beta_M$	Coefficiente de rodamiento del móvil con el piso de caucho//cemento (seco) = 0.8 $\mu$ d

Tabla 2: Variables para simular la respuesta del sistema

En las gráficas (1) y (2) se presentan las respuestas del sistema (PBM) a partir de las ecuación (8) y (9).



Gráfica 1: Respuesta del sistema péndulo.

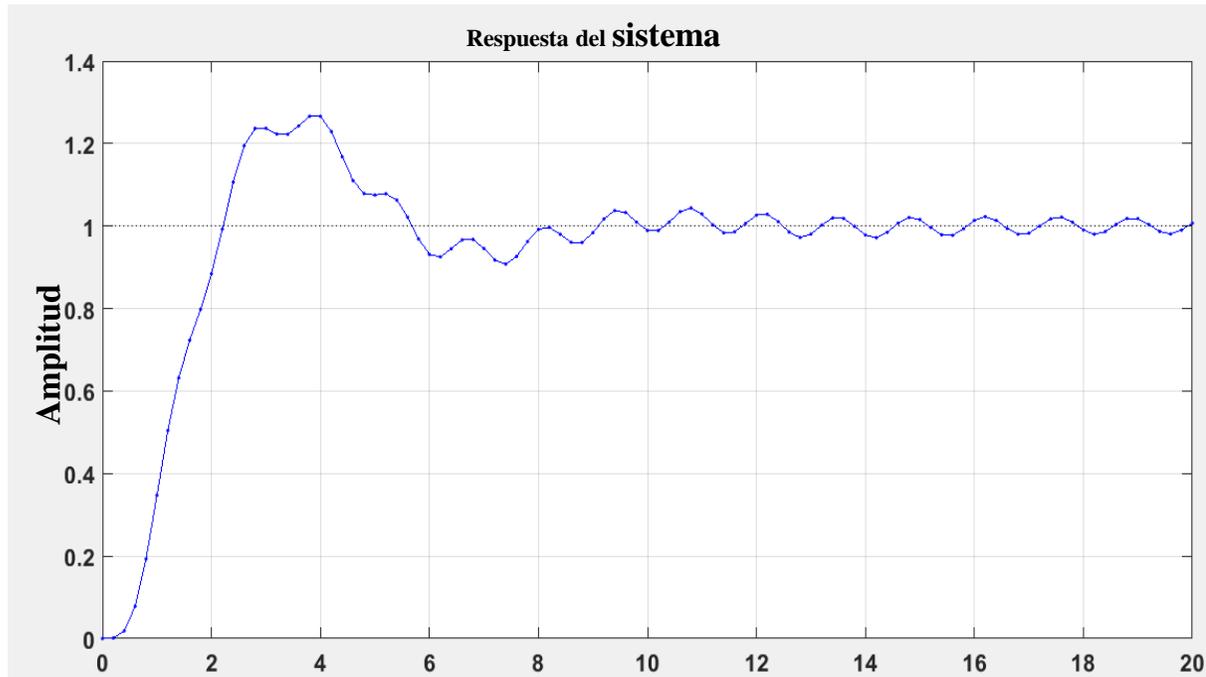


Gráfica 2: Respuesta del sistema base móvil

# Modelado matemático del sistema

La función de transferencia general se expresa como  $F(s)$ , ecuación (10) y en la gráfica 3 se presenta la respuesta del sistema

$$F(s) = \frac{0.5}{s^4 + 0.89s^3 + 22.64s^2 + 17.35s + 21.17} \quad (10)$$



Gráfica 3: Respuesta del sistema PBM.

## Análisis de la señal de salida

Mediante Matlab se analiza la respuesta del sistema de la figura (3), se determina que el tiempo de subida  $tr = 1.39$  segundo, el tiempo de establecimiento  $ts = 17.6$  segundos, con un sobre impulso  $Mp = 26.6\%$ .

# Diseño e implementación del controlador PID

La estructura más convencional de un PID, se puede representar como en la ecuación (11) y su representación en bloques se muestra en la figura 3.

$$PID = kp + ki \frac{1}{s} + kds \quad (11)$$

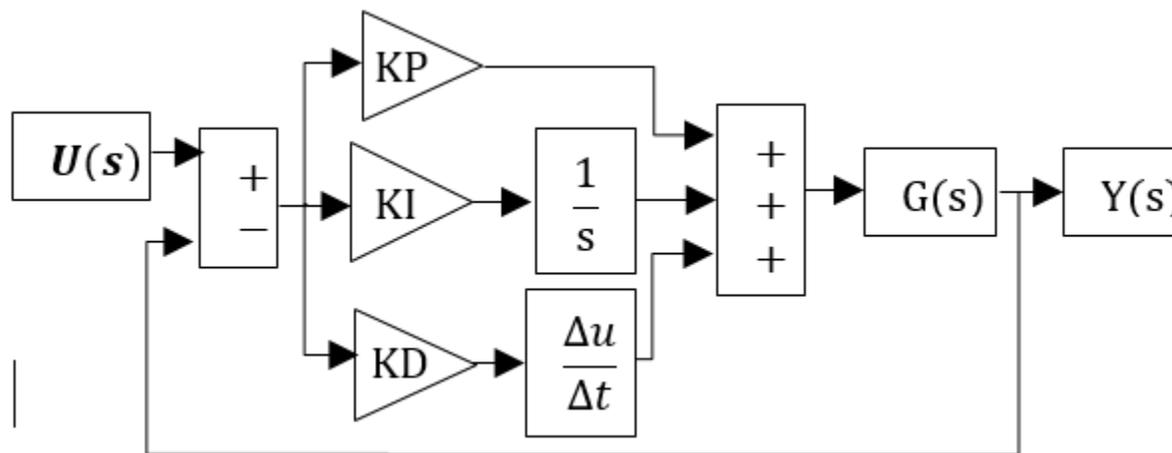


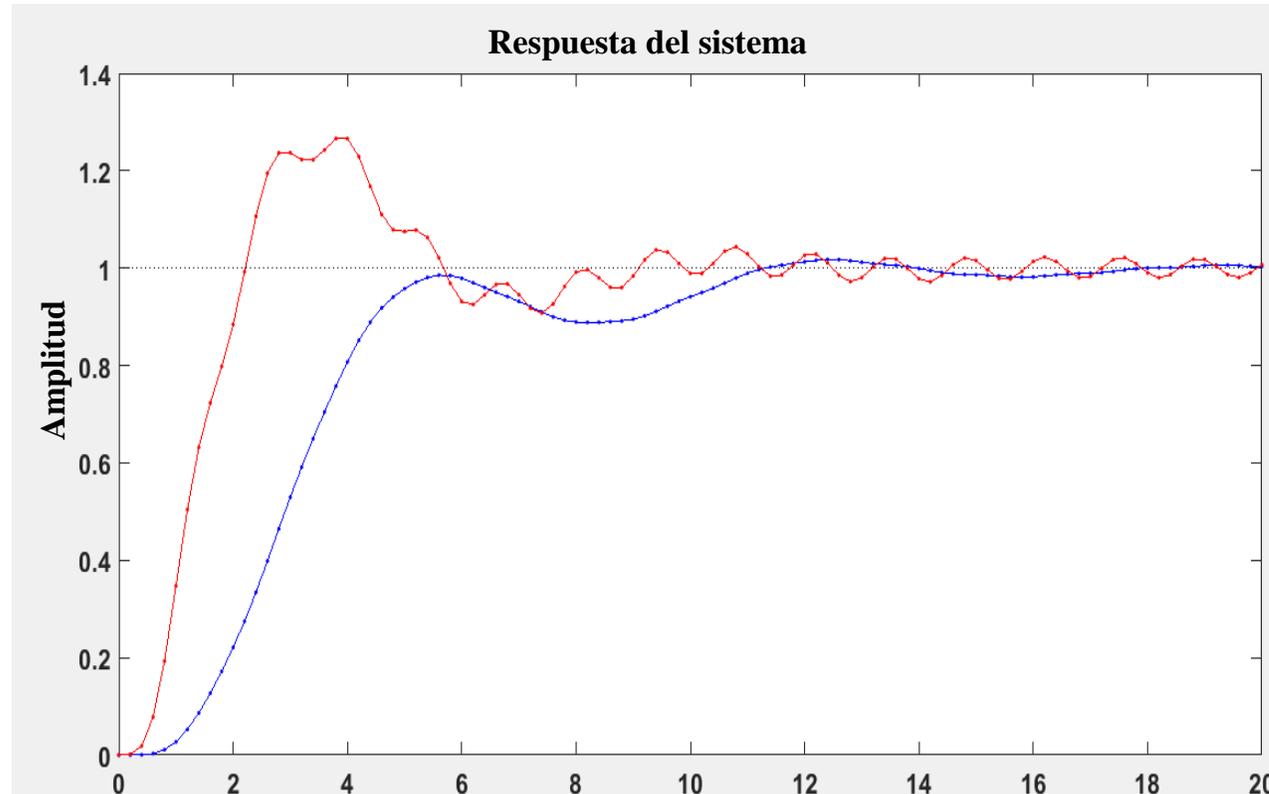
Figura 3: Estructura del PID implementado.

Se establecen los parámetros para el diseño del controlador: lograr un tiempo de estabilización  $t_s \leq 1$  segundo, un sobre impulso  $MP \leq 5\%$  y un ángulo de entrada  $\theta = \pm 10$  grados con respecto a la vertical, se determinan las constantes del PID mediante el método de sintonización por ubicación de polos y ceros utilizando la ecuación (10), por lo que se presenta el modelo del PID en la ecuación (12).

$$PID = \frac{12.66}{s} \quad (12)$$

# Diseño e implementación del controlador PID

En la gráfica 4, se presenta la respuesta del sistema, el color azul representa la salida con la implementación del controlador.



Gráfica 4: Salida del sistema con el PID Implementado

## Resultado esperado

$$ts \leq 1 \text{ segundo}$$

$$MP \leq 5\%$$

## Resultado obtenido

$$ts = 10.8 \text{ segundos}$$

$$MP \leq 1.79\%$$

# Control Robusto por Modelo Interno

El método de control robusto por modelo interno (IMC) depende directamente de la estructura del sistema y del modelo matemático de la planta, actúa como un filtro pasabajo para reducir las oscilaciones de salida, debido a la discrepancia del modelaje y el proceso real, la figura (4) muestra el diagrama de bloques de la estructura de un controlador IMC.

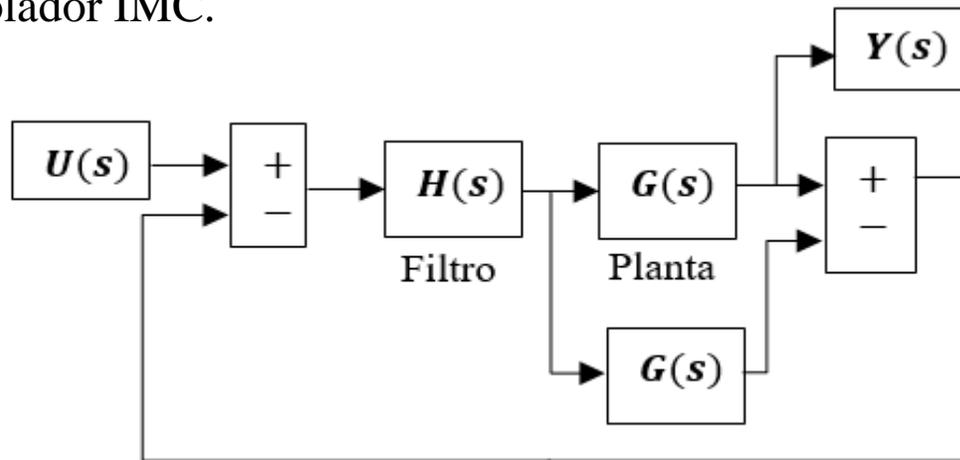
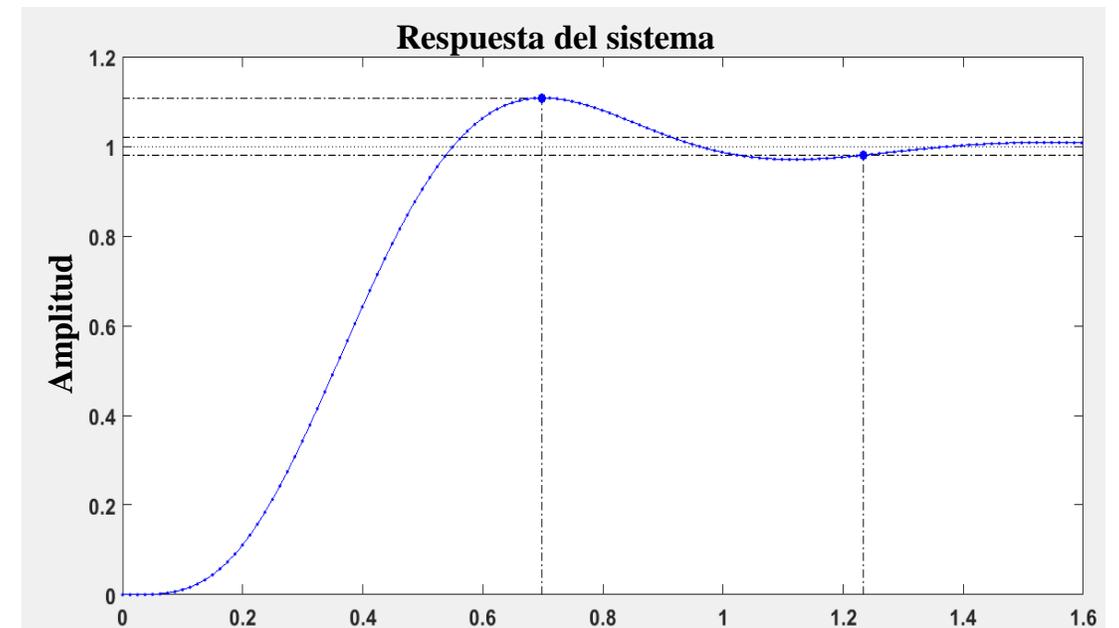


Figura 4: Estructura del controlador IMC.

Al implementar el controlador IMC, se puede observar una mejoría considerable en la reducción del tiempo de estabilización de 1.23 segundo y un sobre impulso de 10.8%. gráfica (5).



Gráfica 5: Salida del sistema con IMC.

# Resultados

Diagrama de bloques simplificado de la integración del PID al modelo IMC.

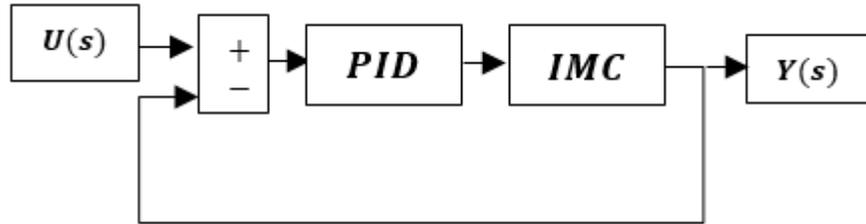
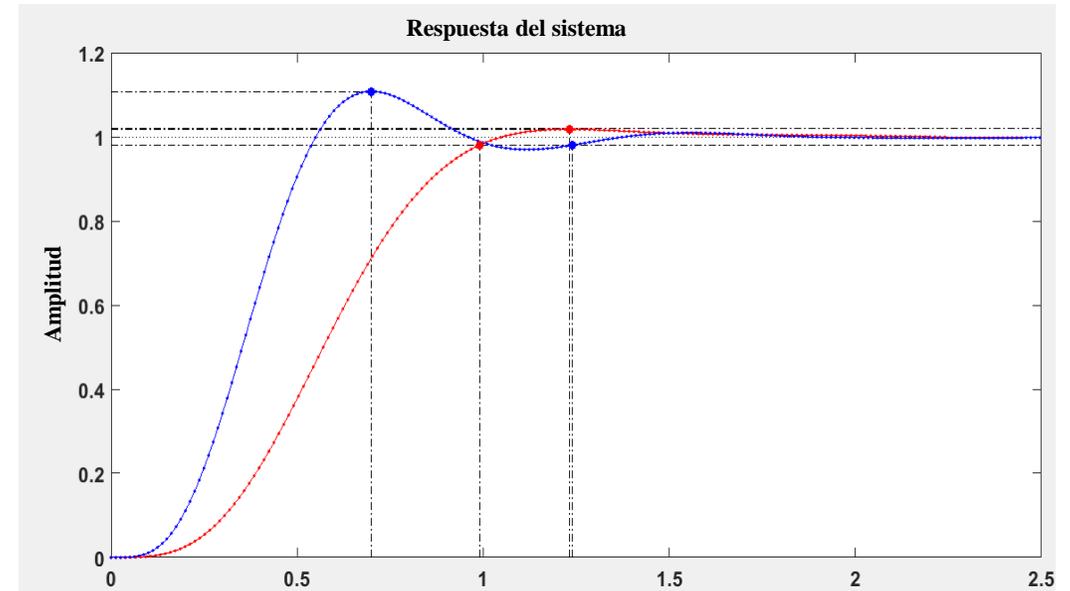


Figura 5: Diagrama de bloques de PID y IMC

Al simular el modelado del sistema PBM con la implementación de los controladores IMC y PID, se logró el objetivo propuesto, en la gráfica (6), el color rojo representa la respuesta del sistema controlada, en la medida que se incrementa el grado del filtro aplicado en el control IMC se reduce el tiempo de estabilización ( $t_s$ ).



Gráfica 6: Respuesta del sistema con la implementación del y IMC y PID

## Resultado esperado

$$t_s \leq 1 \text{ segundo}$$

$$MP \leq 5\%$$

## Resultado obtenido

$$t_s = 990 \text{ milisegundos}$$

$$MP \leq 1.79\%$$

# Conclusiones

Este artículo presenta el modelo matemático de un péndulo de base móvil, a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, que se obtuvieron al aplicar las leyes de Newton-Euler y mediante la aplicación de la transformada de Laplace, se obtuvo la función de transferencia que se utilizó para simular y analizar el comportamiento del sistema, para realizar la simulación fue necesario diseñar el mecanismo en SolidWorks y mediante la librería (*SimMechanics Link*) se vinculó a Matlab y Simulink versión 2017. Con estas herramientas se corroboraron los resultados con los parámetros establecidos en el objetivo, en un principio la idea era diseñar un controlador PID óptimo para el modelo de la planta, pero durante el análisis se determinó que el controlador no cumplía con las expectativas esperadas en cuanto al tiempo de estabilización por tratarse de un sistema muy inestable, entonces se optó aplicar un controlador robusto al modelo de la planta con el objetivo de reducir las oscilaciones de salida y posteriormente aplicar un PID a la nueva función de transferencia. Con estos dos controladores implementados se logró el objetivo propuesto en diseñar, modelar y controlar un péndulo de base móvil, cumpliendo con los objetivos establecidos.

# Sugerencias

Es recomendable ajustar los parámetros de un controlador una vez que se lleva a la práctica, ya que estos son diseñados a partir de modelos matemáticos en condiciones ideales y en ocasiones se ven afectados por las variables que no fueron consideradas en el modelado. Otro de los puntos importantes de la dinámica del mecanismo es evitar un alto sobre impulso, ya que este factor tiene la capacidad de desestabilizar completamente el sistema.

Gracias por su atención

## Fuentes bibliográficas

Pérez Cisneros M. A., Cuevas Jiménez E.V, & Zaldívar Navarro D. (2015). *Fundamentos de robótica y mecatrónica con Matlab y Simulink*. México: Alfaomega.

Hernández Gaviño R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: Conceptos, aplicaciones y simulación con Matlab*. México: Pearson.

Reyes Cortés F., Cid Monjaraz J., & Vargas Soto E. (2013). *Mecatrónica: Control y automatización*. México: Alfaomega.

Reyes Cortes F., (2012). *Matlab aplicado a robótica y mecatrónica*, México: Alfaomega.

Ogata K. (1987). *Dinámica de Sistemas*. Distrito Federal: Prentice Hall.

J. Aström (2009). *Control PID avanzado*. Madrid, España: Pearson, Prentice Hall.

G. Zill D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Cengage learning.

Dorsey J. (2005). *Sistemas de control continuos y discretos*. México: McGraw-Hill.

R. Kurfess T. (2005). *Robotics and automation handbook*. United States of America: CRC Press.

Ogata K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna*. Distrito Federal: Prentice Hall.



**ECORFAN®**

© ECORFAN-Mexico, S.C.

No part of this document covered by the Federal Copyright Law may be reproduced, transmitted or used in any form or medium, whether graphic, electronic or mechanical, including but not limited to the following: Citations in articles and comments Bibliographical, compilation of radio or electronic journalistic data. For the effects of articles 13, 162,163 fraction I, 164 fraction I, 168, 169,209 fraction III and other relative of the Federal Law of Copyright. Violations: Be forced to prosecute under Mexican copyright law. The use of general descriptive names, registered names, trademarks, in this publication do not imply, uniformly in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protector in laws and regulations of Mexico and therefore free for General use of the international scientific community. BCIERMMI is part of the media of ECORFAN-Mexico, S.C., E: 94-443.F: 008- ([www.ecorfan.org/](http://www.ecorfan.org/) booklets)